— La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A n'est pas équivalente à la matrice identité, donc A n'est pas inversible.

Théorème 2.23 *Caractérisation des matrices inversibles*

Soit $A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille n. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible
2. $A \sim \mathbb{I}_n$
3. La matrice échelonnée réduite de A a n pivots (un par ligne, un par colonne).
4. A^T est inversible.
5. A est un produit de matrices élémentaires.
6. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ possède $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ comme unique solution.
7. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
8. L'application linéaire $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est injective.
9. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet exactement une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.
10. Vect $(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \mathbb{R}^n$.
11. L'application linéaire $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective.
12. Il existe une matrice carrée C telle que $CA = \mathbb{I}_n$ (inverse à gauche).
13. Il existe une matrice carrée D telle que $AD = \mathbb{I}_n$ (inverse à droite).

Démonstration. $1 \Leftrightarrow 2$ d'après le théorème 2.21
$2 \Leftrightarrow 3$ de manière évidente
$1 \Leftrightarrow 4$ d'après 2.14 et 2.8.
$2 \Leftrightarrow 5$ d'après la deuxième partie de 2.21.
$2 \Rightarrow 6$ de manière évidente
$6 \Leftrightarrow 7$ d'après le point 1a de la remarque 1.1.4.58.
$6 \Leftrightarrow 8$ d'après 1.1.5.85

$6 \Rightarrow 3$ d'après la section 1.3.3 et A a n colonnes.
$1 \Rightarrow 9$ d'après 2.15
$9 \Rightarrow 6$ de manière évidente.
$9 \Rightarrow 10$ d'après 1.1.3.48
$10 \Rightarrow 3$ d'après 1.1.3.48
$10 \Leftrightarrow 11$ d'après 1.1.5.81
$1 \Rightarrow 12$ et $1 \Rightarrow 13$ par définition.
$12 \Rightarrow 6$ car si $CA = \mathbb{I}_n$, alors $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x} = CA\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

$13 \Rightarrow 11$ car si $AD = \mathbb{I}_n$, alors quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x} = D\overrightarrow{b}$ vérifie $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

☐

Définition 2.24 *Matrice singulière*

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On dit que A est singulière si A n'est pas inversible.

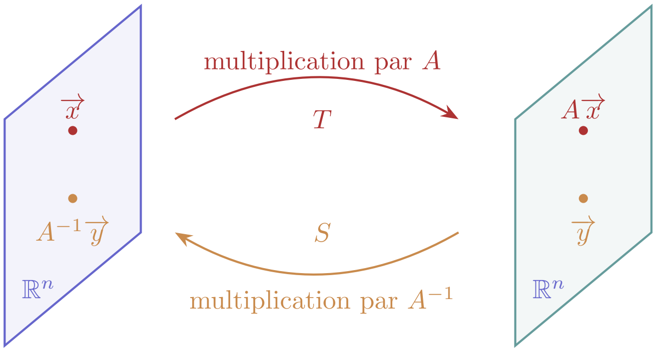
Remarque 2.2.0.25. *Une matrice carrée est soit inversible, soit singulière. Si une matrice n'est pas carrée, la question de l'inversibilité n'a pas de sens.*

2.6 Applications linéaires inversibles

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, et $T : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto A\overrightarrow{x} \end{array}$.

Si A est inversible, alors A^{-1} existe et nous pouvons considérer l'application linéaire $S : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{y} & \longmapsto A^{-1}\overrightarrow{y} \end{array}$.

Nous avons le schéma suivant :



Comme $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$, les compositions $S \circ T$ et $T \circ S$ satisfont :

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{x} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ (T \circ S)(\overrightarrow{y}) &= \overrightarrow{y} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Définition 2.26 *Application linéaire inversible*

On dit que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible s'il existe une application linéaire $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{aligned} & S(T(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{x} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\overrightarrow{y})) = \overrightarrow{y} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Théorème 2.27 *Caractérisation des applications linéaires inversibles*

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et soit A la matrice canoniquement associée à T. Nous avons l'équivalence :

$$T \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ inversible.}$$

Dans ce cas, l'application linéaire $S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{y} & \longmapsto & A^{-1}\overrightarrow{y} \end{array}$ est l'unique application linéaire qui satisfait

$$\begin{aligned} & S(T(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{x} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\overrightarrow{y})) = \overrightarrow{y} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

On l'appelle *l'inverse de* T, notée T^{-1}.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que T est inversible. On a $T(S(\overrightarrow{b})) = \overrightarrow{b}$ pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ admet au moins une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ et T est surjective. Le théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23 nous dit que dans ce cas, A est inversible.

($\Leftarrow$) Si A est inversible, alors l'application linéaire $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associée à A^{-1} satisfait

$$\begin{aligned} & S(T(\overrightarrow{x})) = A^{-1}A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{et} \quad & T(S(\overrightarrow{y})) = AA^{-1}\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \quad \text{pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donc T est inversible.

Montrons maintenant que S est unique.

Supposons que $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfait aussi $U(T(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{x}$ et $T(U(\overrightarrow{y})) = \overrightarrow{y}$.

Comme T est surjective, pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe (au moins) un $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{b}) &= S(T(\overrightarrow{x})) = (S \circ T)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \\ U(\overrightarrow{b}) &= U(T(\overrightarrow{x})) = (U \circ T)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

donc $S(\overrightarrow{b}) = U(\overrightarrow{b})$ pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$, donc $S = U$.

□

Remarque 2.2.0.28. *Si T est inversible, T est bijective.*

2.7 Matrices par blocs

Nous avons vu qu'une matrice, si elle est initialement définie comme un tableau de nombres, peut être vue comme une liste de vecteurs colonnes. Or un vecteur colonne est une matrice à une colonne. Autrement dit, une matrice peut être vue comme une liste de matrices. Nous allons généraliser cette idée et considérer des matrices définies à partir de blocs de matrices.

Une matrice par blocs est définie non pas à partir de coefficients, mais de sous-matrices :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Ici, chaque A_{ij} est une matrice de taille $m_i \times n_j$. De manière évidente, pour que cela soit correctement défini, les sous-matrices d'une même ligne ont toutes autant de lignes, et les sous-matrices d'une même colonne ont toutes autant de colonnes.

Exemple. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$ peut être par exemple définie comme $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$ où $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad A_{11} \quad & \quad A_{12} \quad & A_{13} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \quad A_{21} \quad & \quad A_{22} \quad & A_{23} \end{array} \end{array}$$

Cet exemple n'a pas un grand intérêt en soi, mais nous allons voir que définir une matrice avec des blocs permet de généraliser certaines propriétés de matrices de manière très intéressante.

Opérations sur les matrices par blocs

Soit A et B deux matrices de même taille, organisées en blocs tels que la taille de chaque A_{ij} est la même que celle de B_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

Alors

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{bmatrix}.$

Pour multiplier deux matrices par blocs, on applique la règle classique du produit matriciel (produit ligne-colonne), mais en remplaçant les scalaires par les blocs correspondants.

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} m \times n \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\hphantom{A_{11}}}_{n_1} & \underbrace{\hphantom{A_{12}}}_{n_2} & \underbrace{\hphantom{A_{13}}}_{n_3} \end{array}\end{array} \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} \\ \\ B_{21} \\ \\ B_{31} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \}n_1 \\ \\ \}n_2 \\ \\ \}n_3 \end{array} \quad n \times p$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} \\ \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} \end{bmatrix} m \times p$$

Exemple

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\hphantom{3\quad -1\quad 0}}_{3} & \underbrace{\hphantom{2\quad 0}}_{2} & \underbrace{\hphantom{1}}_{1} \end{array} \end{array} \qquad B=\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ B_{11} \\ \\ \end{array}\right\} 3 \\ \left.\begin{array}{l} B_{21} \\ \end{array}\right\} 2 \\ \left.B_{31}\right\} 1 \end{array}$$

où :

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{13}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{23}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{31}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Le produit AB se calcule par blocs :

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{bmatrix} 3 \times 3$$

Calculons chaque bloc :

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13}B_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{23}B_{31} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$AB = \begin{bmatrix} 6+0+1 & -2+0+1 & 3+2+1 \\ 1+2+3 & 5+0+3 & 2+1+3 \\ 0+2+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 6 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas particuliers

Nous avons déjà vu des matrices partitionnées par colonnes : $A = \left[\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\right]$.

Une matrice peut aussi être partitionnée par ligne :

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \mathrm{lgn}_2(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{bmatrix}$$

on dira que A est partitionnée en n colonnes ou en m lignes.
On peut alors écrire le produit matriciel de plusieurs façons :
Si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, alors

1. $AB = A \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_2} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A\overrightarrow{b_1} & A\overrightarrow{b_2} & \cdots & A\overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}}$

2. $\underset{m\times n}{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A) \end{bmatrix}}_{\text{blocs lignes}}, \quad \underset{n\times p}{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overrightarrow{b_1} & \cdots & \overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}}_{\text{blocs colonnes}}$

$$AB = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_1} & \overbrace{\mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_2}}^{\in\mathbb{R}} & \cdots & \mathrm{lgn}_1(A)\overrightarrow{b_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_1} & \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_2} & \cdots & \mathrm{lgn}_m(A)\overrightarrow{b_p} \end{bmatrix}$$

Ce n'est pas une matrice par blocs, chaque composante est réelle :

$$\mathrm{lgn}_i(A)\overrightarrow{b_j} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \in \mathbb{R}.$$

3. $A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2} & \cdots & \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \mathrm{lgn}_1(B) \\ \vdots \\ \mathrm{lgn}_n(B) \end{bmatrix}$

$$AB = \overrightarrow{a_1}\mathrm{lgn}_1(B) + \overrightarrow{a_2}\mathrm{lgn}_2(B) + \cdots + \underbrace{\overrightarrow{a_n}\mathrm{lgn}_n(B)}_{m\times p}$$

En effet,

$$\overrightarrow{a_i}\mathrm{lgn}_i(B) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ip} \end{bmatrix}$$

est de taille $m \times p$:

$$\overrightarrow{a_i}\mathrm{lgn}_i(B) = \begin{bmatrix} a_{1i}b_{i1} & \cdots & a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi}b_{i1} & \cdots & a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix}$$

2.8 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Définition 2.29 *Matrices triangulaires, matrices diagonales*

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j < i$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est triangulaire supérieure par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $j < i$.
Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j > i$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est triangulaire inférieure par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $j > i$.
Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice $A = (A_{ij})$ est diagonale par blocs si $A_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Inverse des matrices triangulaires par bloc

Soit A une matrice de taille $n \times n$ où $n = n_1 + n_2$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & \quad n_2 \end{matrix} & \end{array}$$

On suppose que A est inversible, et on décompose A^{-1} en blocs de même taille que A :

$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ n_2. \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & \quad n_2 \end{matrix} & \end{array}$$

On a alors

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, la décomposition en blocs de la matrice $\mathbb{I}_n$ s'écrit

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \mathbb{I}_{n_1} \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0_{n_1 \times n_2} \\ A_{22}B_{21} = 0_{n_2 \times n_1} \\ A_{22}B_{22} = \mathbb{I}_{n_2} \end{cases}$$

Donc A_{22} est inversible et B_{22} est son inverse.

De plus,

$$A_{22}B_{21} = 0_{n_2 \times n_1} \Rightarrow A_{22}^{-1}A_{22}B_{21} = A_{22}^{-1}0_{n_2 \times n_1}$$

donc $B_{21} = 0_{n_2 \times n_1}$.

Donc

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \mathbb{I}_{n_1} \Rightarrow A_{11}B_{11} = \mathbb{I}_{n_1},$$

donc A_{11} est inversible et B_{11} est son inverse.

Enfin,

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0_{n_1 \times n_2} \Rightarrow A_{11}^{-1}A_{11}B_{12} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = A_{11}^{-1}0_{n_1 \times n_2}$$

donc $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$.

On vient de démontrer une implication du théorème suivant. La réciproque se vérifie en multipliant les matrices entre elles.

Théorème 2.30

Si A est une matrice de taille $n \times n$ triangulaire supérieure par blocs.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \end{array}$$

Alors A est inversible si et seulement si A_{11} et A_{22} sont inversibles. Et dans ce cas,

$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & \qquad n_2 \end{array} & \end{array}$$

Chapitre 3 : Déterminant

3.1 Définition

Définition 3.1 *Déterminant*

— Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est le nombre

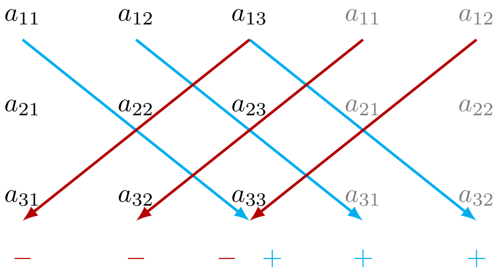
$$\det(A) = ad - bc.$$

— Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ est le nombre

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Notation. On utilise aussi la notation $|A|$ pour le déterminant de A.

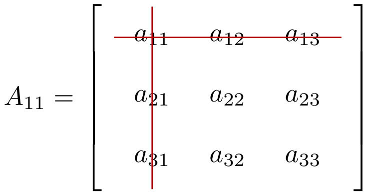
Le déterminant d'une matrice de taille 3×3, **et uniquement de taille** 3×3 peut être calculé à l'aide de la *Règle de Sarrus* :

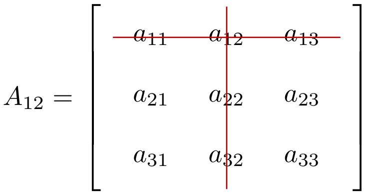


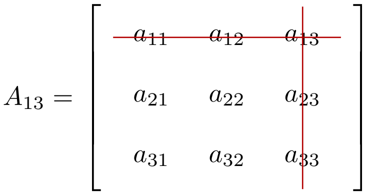
On peut réécrire le déterminant d'une matrice de taille 3 × 3 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

En notant par A_{jk} la matrice de taille 2 × 2 obtenue en supprimant la j-ième ligne et la k-ième colonne de la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$:







la formule précédente s'écrit

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}).$$

Exemple.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

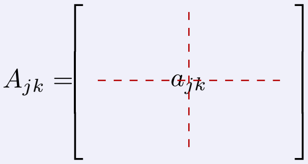
On peut maintenant donner une définition récursive du déterminant d'une matrice carrée quelconque :

Définition 3.2 *Déterminant*

Soit $A = (a_{jk})$ une matrice carrée de taille $n \times n$.
Le déterminant de A est le nombre

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) - a_{14}\det(A_{14}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_{1k}),\end{aligned}$$

où A_{jk} est la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la j-ième ligne et la k-ième colonne :



Cette définition récursive permet de calculer le déterminant d'une matrice de toute taille, en le réduisant à une matrice de taille inférieure.

Définition 3.3 *Cofacteur*

Soit $A = (a_{jk})$ une matrice carrée de taille $n \times n$.
Le *cofacteur* (j, k) de A est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

En utilisant les cofacteurs, le déterminant de la matrice A devient

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} + \ldots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k}.$$

Théorème 3.4 *Développement par rapport à la j-ième ligne*

Soit $A = (a_{jk})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Nous avons

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{j+1} a_{j1} \det(A_{j1}) + (-1)^{j+2} a_{j2} \det(A_{j2}) + \ldots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det(A_{jn}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}),\end{aligned}$$

ou encore

$$\det(A) = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3} + a_{j4}C_{j4} + \ldots + a_{jn}C_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}C_{jk}.$$

Démonstration. Admis. □

Ce théorème indique que l'on peut calculer un déterminant en développant par rapport à n'importe quelle ligne. Il est donc judicieux, lors d'un calcul pratique de bien choisir la ligne pour minimiser la complexité des calculs, par exemple, dans le cas où une ligne contient beaucoup de zéros.

Exemples. Développement par rapport à la 2-ème ligne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 2(-1)^{2+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 4(-1)^{2+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} \\ &\quad + (-6)(-1)^{2+3} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=3} \\ &= 0 + 0 + 6 \cdot 3 = 18\end{aligned}$$

Développement par rapport à la 3-ième ligne :

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix} = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & 0\\ 4 & -6\end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -6\end{vmatrix}$$
$$+ 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}$$
$$= -3\cdot(-6) = 18$$

Corollaire 3.5

Si une matrice A contient une ligne formée de zéros, alors son déterminant est nul : $\det(A) = 0$.

3.2 Propriétés fondamentales

Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 4×4, il faut donc calculer quatre déterminants de matrices de taille 3×3 et pour chacun de ceux-ci, il faut calculer trois déterminants de matrices de taille 2×2. Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 5×5, il faut calculer $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ déterminants de taille 2×2 et ainsi de suite. Nous avons donc intérêt à trouver une méthode qui demande moins de calculs.

Nous allons voir maintenant une suite de théorèmes qui permettent d'optimiser les calculs de déterminants.

Théorème 3.6 *Déterminant et opérations élémentaires*

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice agissent sur le déterminant de la manière suivante.

Soit A et C deux matrices carrées de taille $n\times n$.

Type 1 Si $A \overset{L_j \leftrightarrow L_k}{\sim} C$ alors $\det(C) = -\det(A)$.

Type 2 Si $A \overset{L_j \leftarrow \lambda L_j}{\sim} C$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $\det(C) = \lambda\det(A)$ ou $\det(A) = \frac{1}{\lambda}\det(C)$.

Type 3 Si $A \overset{L_j \leftarrow L_j+\lambda L_k}{\sim} C$ alors $\det(C) = \det(A)$.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soit $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Nous avons $\det(A) = ad - bc$ et

a) $\begin{vmatrix}c & d\\ a & b\end{vmatrix} = cb - ad = -\det(A)$.

b) $\begin{vmatrix}\lambda a & \lambda b\\ c & d\end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad-bc) = \lambda\det(A)$.

c) $\begin{vmatrix}a+\lambda c & b+\lambda d\\ c & d\end{vmatrix} = (a+\lambda c)d - (b+\lambda d)c = ad - bc = \det(A)$.

Exemple. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$.

Nous allons utiliser des opérations élémentaires pour simplifier le calcul.